ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΟ ΠΕΚ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΜΑΙΟΣ 1997

ΕΡΓΟ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ.

1. Αναφορά παραδειγμάτων.

α). Γρύλος που σηκώνει το αυτοκίνητο (**1.** Η δύναμη συνδέεται με τον δρόμο; **2.** Τι προκύπτει για το γινόμενο δύναμης-δρόμου; **3.** Μπορεί μια μηχανή να το αυξήσει;)

β). Γερανός που ανυψώνει ένα σώμα (**1.** Η δύναμη συνδέεται με τον δρόμο; **2.** Πως συνδέεται η δύναμη, το ύψος και το καύσιμο: **3.** Μπορεί το έργο να μετρηθεί με την κατανάλωση καύσιμου;)

2. Ορισμός.

I. "Το έργο δύναμης W_F, σταθερού μέτρου και διεύθυνσης, η οποία μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής σε ευθύγραμμη τροχιά, είναι ίσο με το γινόμενο του μέτρου F της δύναμης επί το διάστημα που μετατοπίστηκε S και επί το συνημίτονο (συν) της γωνίας φ την οποία σχηματίζει η φορά της δύναμης με την φορά της μετατόπισης"

$$\boxed{W = F.s.\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (1)$$

II."Το έργο W_F δύναμης σταθερού μέτρου και διεύθυνσης η οποία μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της σε τυχούσα τροχιά είναι ίση με το γινόμενο του μέτρου F της δύναμης επί την προβολή S της μετατόπισης στην διεύθυνση της δύναμης"

$$\boxed{W = F.s'} \quad (2)$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις είναι φανερό ότι για να υπολογίσουμε το έργο μιας δύναμης η οποία δεν έχει την διεύθυνση της μετατόπισης πρέπει ή να προβάλλουμε την δύνα μη στην διεύθυνση της μετατόπισης ή να προβάλλουμε την μετατόπιση στην διεύθυνση της δύναμης.

Το έργο είναι μονόμετρο μέγεθος και μπορούμε να προσθέσουμε το έργο που παράγει κάθε δύναμη χωριστά για να υπολογίσουμε το συνολικό έργο δηλαδή ισχύει η αρχή επαλληλίας η οποία αναφέρει ότι:

«Το έργο της συνισταμένης δύναμης είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των συνιστουσών δυνάμεων»

$$\boxed{W_{F o\lambda} = W_{F1} + W_{F2} + ... + W_{F\nu}}$$

3. Μονάδες έργου

Με βάση τη μαθηματική σχέση του έργου μπορούμε τώρα να ορίσουμε τις μονάδες του

S.I.: 1Nt.m=1 Joule
Τ.Σ.: 1Kp.m=1Kpm

Σχέση μεταξύ των μονάδων

1Kpm=9,81 Joule

4. Μεθοδολογία ασκήσεων.

Η δύναμη F παράγει έργο όταν:

1. Το σώμα μετατοπίζεται

2. Η δύναμη F έχει μη μηδενική συνιστώσα στη διεύθυνση του διαστήματος s.

Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στις εξής περιπτώσεις:

3. Το έργο χαρακτηρίζεται σαν θετικό ή παραγόμενο όταν η διεύθυνση της δύναμης σχηματίζει με την διεύθυνση της μετατόπισης γωνία μεταξύ 0^o και 90^o και σαν αρνητικό ή δαπανούμενο όταν η διεύθυνση της δύναμης σχηματίζει με την διεύθυνση της μετατόπισης γωνία μεταξύ 90^o και 180^o .

4. Το βάρος Β δεν παράγει ούτε καταναλώνει έργο όταν ενεργεί κάθετα στη διεύθυνση κίνησης.

5. Το έργο που παράγει ή καταναλώνει το Β ενός σώματος είναι ανεξάρτητο της τροχιάς και εξαρτάται μόνο από την κατακόρυφη μετατόπιση h μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης δηλ. $W_B = B.h$

6. Αν σε σώμα ενεργεί δύναμη F που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο και υπάρχει τριβή Τ μεταξύ σώματος και επιπέδου με συντελεστή τριβής n τότε το έργο της συνισταμένης δύναμης υπολογίζεται ως εξής:

$W = \Sigma F_x.s \Rightarrow W = (F_x - T).s$ όπου s το διάστημα που θα διανύσει το σώμα.

7. Κάθε δύναμη που μεταβάλλει μόνο την κατεύθυνση της ταχύτητας, δηλαδή είναι κάθετη στην ταχύτητα (όπως π.χ. η κεντρομόλος δύναμη) δεν παράγει έργο.

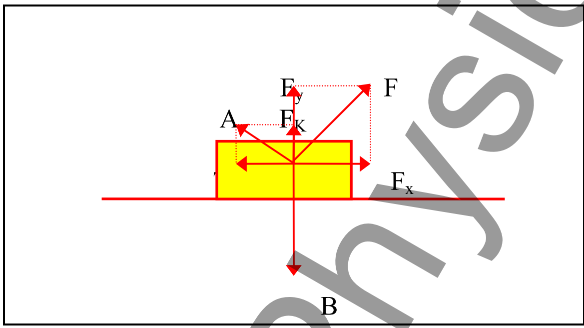
8. Το έργο της δύναμης του ελατηρίου κατά την επιμήκυνση ή συμπίεση του ελατηρίου προκύπτει από την διαφορά μεταξύ της τελικής και αρχικής του τιμής, η δε απόσταση μετρείται πάντα από την θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.

$$W = \frac{1}{2}.K.x_2^2 - \frac{1}{2}.K.x_1^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο.

Σε σώμα μάζας m=2 kgr ενεργεί δύναμη F=10 Nt που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία $\varphi=60^0$,και μετατοπίζει αυτό κατά διάστημα s=10m πάνω σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστούν τα έργα όλων των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα στο διάστημα s. Δίνεται ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου n=0,2.

ΔΙΝΟΝΤΑΙ	ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ
m=2kgr	W=;
F=10Nt	
φ=60°	
s=10m	
n=0,2	



Στο σώμα ενεργούν οι δυνάμεις: το βάρος του B, η πλάγια αντίδραση από το δάπεδο A και η δύναμη F. Αναλύω την δύναμη σε συνιστώσες F_x, F_y.

Επειδή η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής γίνεται σε οριζόντια και ευθύγραμμη τροχιά το παραγόμενο έργο δίνεται από τη σχέση

$$W_{Fx} = F.s.\sigma\upsilon\nu\varphi = 10.10.\frac{1}{2} \Rightarrow W_{Fx} = 50\,Joule$$

Το έργο της τριβής είναι

$$W_T = T.s = n.F_k.s \Rightarrow W_T = n.(B - F_y).s = n.(m.g - F\eta\mu\varphi).s \Rightarrow W_T = 23\,Joule$$

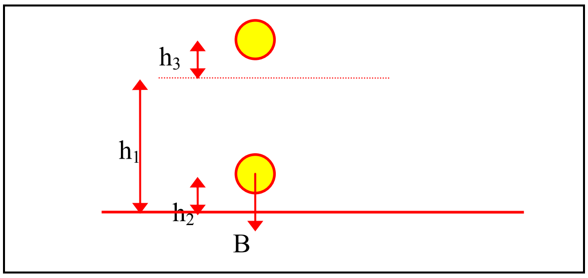
$W_{Fy} = 0$ διότι η F_y είναι κάθετη στη μετατόπιση

$W_{Fk} = 0$ »

$W_B = 0$ »

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο.

Αθλητής βάρους B=70kp πρόκειται να υπερπηδήσει εμπόδιο ύψους 1,3m. Το Κέντρο Βάρους (Κ.Β.) του αθλητή βρίσκεται σε ύψος 90cm και κατά την υπερπήδηση το Κ.Β. βρίσκεται 30cm πάνω από το νήμα. Ποιο το απαιτούμενο έργο. Δίνεται g=10 m/sec^2.



ΔΙΝΟΝΤΑΙ	ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ
B=70kp=700 Nt	W=;
h_1=1,3m	
h_2=90cm=0,9m	

h_3=30cm=0,3m	

Το απαιτούμενο έργο είναι το έργο του βάρους του.

Υπολογίζουμε την μεταβολή του ύψους και ο έχουμε

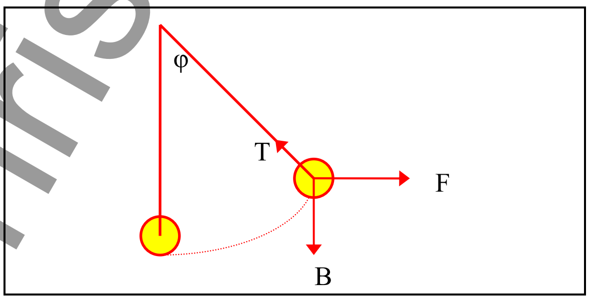
$h=h'-h_2=(1{,}3+0{,}3)-0{,}9=0{,}7m$

$W = B.h = 70.0{,}7 = 49kpm = 490Joule$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Θεωρώ σφαίρα μάζας m=1kgr η οποία είναι στερεωμένη στο κάτω άκρο μη ελαστικού νήματος l=1m και ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Στην σφαίρα ενεργεί δύναμη $F=10\sqrt{3}$ Nt με σταθερή οριζόντια διεύθυνση και μετατοπίζει αυτή σε τέτοια θέση ώστε το νήμα να σχηματίζει με την κατακόρυφη που περνά από την θέση ισορροπίας γωνία 60°. Να υπολογιστούν τα έργα όλων των δυνάμεων για την παραπάνω μετατόπιση της σφαίρας. Δίνεται $g=10\ m/sec^2$.

ΔΙΝΟΝΤΑΙ	ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ
m=1kgr	W=;
l=1m	
$F=10\sqrt{3}$ Nt	
φ=60°	



Στο σώμα ενεργούν οι δυνάμεις: το βάρος του Β, η τάση του νήματος και η δύναμη F.

Επειδή η δύναμη F είναι οριζόντια πρέπει και η διεύθυνση της μετατόπισης να είναι οριζόντια. Έτσι προβάλλω την απόσταση ΑΓ που διανύει η σφαίρα στον οριζόντιο άξονα και έχω :

$$W_F = F.s' = F.(\Gamma A') = F.l.\eta\mu\varphi \Rightarrow W_F = 10.\sqrt{3}.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = 15Joule$$

Η δύναμη του βάρους Β είναι κατακόρυφη και επομένως η διεύθυνση της μετατόπισης πρέπει να είναι επίσης κατακόρυφη. Για τον λόγο αυτό προβάλλω την απόσταση ΑΓ στον κατακόρυφο άξονα και υπολογίζω το έργο.

$$W_B = B.s' = m.g.(AA') \Rightarrow W_B = B.s' = m.g.(OA - OA') \Rightarrow W_B = B.s' = m.g.l.(1-\sigma\upsilon\nu\varphi) =$$

$$= 1.10.1.(1-\frac{1}{2}) \Rightarrow W_B = 5J$$

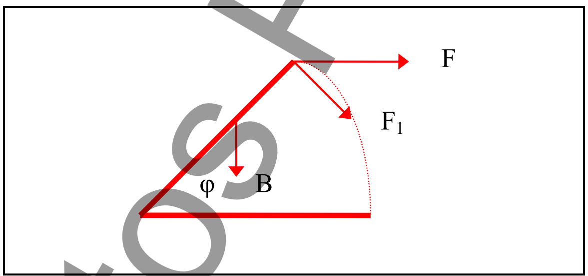
Οι δυνάμεις Β και Fy δεν παράγουν έργο διότι η διεύθυνση της δύναμης είναι συνεχώς κάθετη στη διεύθυνση της μετατόπισης.

Τέλος η τάση Τ του νήματος είναι συνεχώς κάθετη στη μετατόπιση γι' αυτό δεν παράγει έργο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο.

Θεωρώ ράβδο με μήκος l=1m της οποίας το ένα άκρο είναι μόνιμα στερεωμένο και η οποία σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία φ=60°. Στη ράβδο ενεργούν οι δυνάμεις F=100 Nt με σταθερή οριζόντια διεύθυνση και F_1=90/π Nt με διεύθυνση συνεχώς κάθετη στο ένα άκρο της ράβδου. Να υπολογιστούν τα έργα των δυνάμεων κατά την μετακίνηση της ράβδου από την αρχική θέση μέχρι να φτάσει σε οριζόντια θέση.

ΔΙΝΟΝΤΑΙ	ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ
l=1m	W=;
φ=60°	
F=100 Nt	
F_1=90/π Nt	



Στην ράβδο ενεργούν οι δυνάμεις: το βάρος του σώματος, η δύναμη F και η δύναμη F_1.

Επειδή η δύναμη F είναι οριζόντια πρέπει και η διεύθυνση της μετατόπισης να είναι οριζόντια. Έτσι προβάλλω την απόσταση ΑΓ στον οριζόντιο άξονα και έχω:

$$W_F = F.s© = F.(Α©Γ) = F.(ΟΓ - ΟΑ©) \Rightarrow W_F = F.l.(1 - συνφ) \Rightarrow W_F = 100.1.(1 - \frac{1}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_F = 50\,Joule$$

Η δύναμη F_1 είναι συνεχώς εφαπτόμενη στην τροχιά που διαγράφει το άκρο της ράβδου Α. Έτσι σαν μετατόπιση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το μήκος του τόξου που κινήθηκε το σώμα. Το έργο της δύναμης F_1 θα δίνεται από τη σχέση

$W_{F1} = F_1.s' = F_1.l.\varphi$ $W_{F1} = F_1.S'$ όπου το φ μετριέται σε rad

ή $W_{F1} = F_1.\frac{\pi.l.\varphi}{180}$ όπου το φ μετριέται σε μοίρες.

Ο υπολογισμός της απόστασης S΄ γίνεται απ' ευθείας.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ.

1. Αναφορά παραδειγμάτων.

α). Σώμα που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δέχεται την επίδραση σταθερής συνιστάμενης δύναμης F (**1.** Ποιους νόμους χρησιμοποιούμε για την μελέτη του προβλήματος; **2.** Ποια μαθηματική σχέση προκύπτει; **3.** Πως συνδέεται το έργο με την κινητική ενέργεια; **4.** Πότε ένα σώμα περικλείει κινητική ενέργεια;)

2. Ορισμός.

Κινητική ενέργεια (E_K): Είναι η ενέργεια που περικλείει ένα σώμα λόγω της κίνησής του και ορίζεται με το γινόμενο του μισού της μάζας του σώματος επί το τετράγωνο της ταχύτητας.

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}.m.u^2}$$

3. Μονάδες κινητικής ενέργειας

$$\boxed{\text{S.I : 1kgr.m/sec}^2\text{=1 Joule}}$$

4.Μεθοδολογία ασκήσεων.

1. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος δηλώνει το έργο της συνισταμένης δύναμης δηλαδή αν σε ένα σώμα ενεργεί δύναμη F που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο και υπάρχει και τριβή Τ μεταξύ σώματος και επιπέδου με συντελεστή τριβής n τότε το έργο της συνισταμένης δύναμης υπολογίζεται ως εξής:

$$W = \Sigma F_x.s \Rightarrow W = (F_x - T).s$$

όπου s το διάστημα που θα διανύσει το σώμα. Το έργο αυτό δηλώνει τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας

$$\Delta E_K = W$$

Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε ότι χρειάζεται αρκετή προσοχή στον σχεδιασμό και την ανάλυση των δυνάμεων που είναι βασικά θέματα και πρέπει να εξετάζονται πάντα οι δυνάμεις επαφής και πεδίου που αναφέραμε σε προηγούμενα μαθήματα.

2. Όταν ένα σώμα κινείται σε οριζόντια κυκλική τροχιά η ταχύτητά του διατηρείται σταθερή και επομένως και η κινητική του ενέργεια.

3. Η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος.

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στην δεύτερη σημαντική μορφή της ενέργειας που είναι η δυναμική.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ.

1. Αναφορά παραδειγμάτων.

α). Σφαίρα που κρατούμε ακίνητη πάνω από το έδαφος (**1.** Έχει ταχύτητα; **2.** Τι συμβαίνει όταν την αφήσουμε ελεύθερη; **3.** Εκτελεί έργο κατά την κίνησή της; **4.** Από που προέρχεται το έργο αυτό; **5.** Τι συμπεραίνουμε;)

β). Σφαίρα εκκρεμούς που αφήνεται από κάποιο ύψος να χτυπήσει τρεις όμοιες σφαίρες που ηρεμούν (**1.** Έχει ταχύτητα; **2.** Τι συμβαίνει όταν την αφήσουμε ελεύθερη; **3.** Εκτελεί έργο κατά την κίνησή της; **4.** Από που προέρχεται το έργο αυτό; **5.** Τι συμπεραίνουμε;)

2. Ορισμός.

Δυναμική ενέργεια (E_Δ): Είναι η ενέργεια την οποία περικλείει ένα σώμα λόγω θέσης ή κατάστασης στην οποία βρίσκεται και ορίζεται με το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την απόσταση που μετακινήθηκε

$$\boxed{E_\Delta = B.h \Rightarrow E_\Delta = m.g.h}$$

όπου h: Είναι η απόσταση μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης ενός σώματος.

3. Μονάδες δυναμικής ενέργειας

$$\boxed{\text{S.I. : 1Nt.m=1 Joule}}$$

4.Μεθοδολογία ασκήσεων.

1. Κατά τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας ορίζουμε υποχρεωτικά επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας (E_Δ=0) συνήθως δε θα παίρνουμε το οριζόντιο επίπεδο που περνά κατώτερο σημείο.

2. Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας κατά την διάρκεια μιας μετακίνησης ενός σώματος από ένα σημείο Α σε ένα δεύτερο σημείο Β δηλώνει το έργο του βάρους και είναι ανεξάρτητη από την διαδρομή που ακολουθεί το σώμα για να μετακινηθεί από το σημείο Α στο σημείο Β.

$$\Delta E_\Delta = W_B = B.h$$

όπου h η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β.

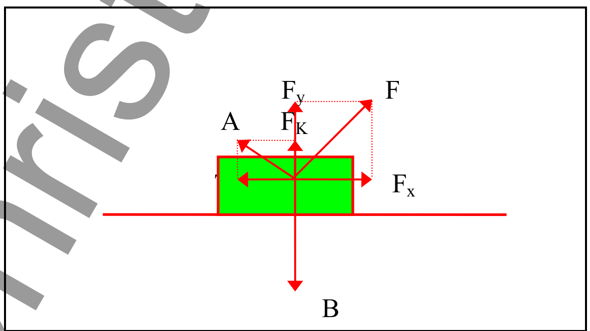
3. Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι θετική όταν το σώμα μετακινείται από χαμηλότερο σε ψηλότερο σημείο και αρνητική όταν το σώμα μετακινείται από ψηλότερο σε χαμηλότερο σημείο.

Θα εξετάσουμε μερικά παραδείγματα για την κατανόηση των εννοιών κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ο.

Σε σώμα μάζας m=10kgr ενεργεί δύναμη F=100Nt που σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία $\varphi=30^0$,και μετατοπίζει αυτό κατά διάστημα s=2m πάνω σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος στο τέλος του διαστήματος των 2m. Δίνεται ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου n=0,2.

ΔΙΝΟΝΤΑΙ	ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ
m=10kgr	u=;
F=100Nt	
φ=30°	
s=2m	
n=0,2	



Στο σώμα ενεργούν οι δυνάμεις: το βάρος του B, η πλάγια αντίδραση από το δάπεδο A και η δύναμη F. Αναλύω την δύναμη σε συνιστώσες F_x, F_y.

Επειδή η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής γίνεται σε οριζόντια και ευθύγραμμη τροχιά το παραγόμενο έργο δίνεται από τη σχέση

$$W_{Fx} = F.s.\sigma\upsilon\nu\varphi = 100.2.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow W_{Fx} = 173{,}2\,Joule$$

Το έργο της τριβής είναι

$$W_T = T.s = n.F_k.s \Rightarrow W_T = n.(B - F_y).s = n.(m.g - F\eta\mu\varphi).s \Rightarrow W_T = 20\,Joule$$

Επομένως το συνολικό έργο των δυνάμεων είναι

$$W = W_{F_x} - W_T = 153{,}2\,Joule$$

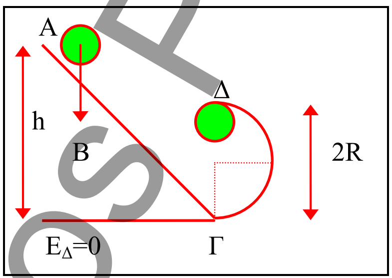
Το έργο αυτό εκφράζει την κινητική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα και η οποία είναι ίση με

$$E_K = W \Rightarrow \frac{1}{2}.m.u^2 = W \Rightarrow u = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{30{,}64} = 5{,}54\,m/\sec$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6ο.

Θεωρούμε σώμα με μάζα m=1 kgr το οποίο αφήνουμε να κινηθεί από την κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης 30^0. Το σώμα φτάνοντας στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου έχει διανύσει διάστημα s=20m και εισέρχεται σε λεία κατακόρυφη ημικυκλική τροχιά η οποία έχει στραμμένα τα κοίλα προς το κεκλιμένο επίπεδο. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι R=2m. Να υπολογιστεί η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος από την θέση που ξεκίνησε μέχρι να φτάσει στο ανώτατο σημείο της κυκλικής τροχιάς. Δίνεατι $g=10m/sec^2$.

ΔΙΝΟΝΤΑΙ	ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ
m=1kgr	$\Delta E_{\Delta YN}$=;
$\varphi=30^0$	
s=20m	
R=2m	



Θεωρούμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Οι δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα είναι το βάρος του και η αντίδραση του επιπέδου που είναι κάθετη στα επίπεδα αφού αυτά είναι λεία.

Η δυναμική ενέργεια στο σημείο Α δίνεται από την σχέση

$$E_\Delta(A) = B.h = m.g.s.\eta\mu\varphi \Rightarrow E_{\Delta(A)} = 1.10.20.\frac{1}{2} = 100 Joule$$

Η δυναμική ενέργεια στο σημείο Δ δίνεται από την σχέση

$$E_\Delta(\Delta) = B.h = m.g.2R \Rightarrow E_{\Delta(A)} = 1.10.2.2 = 40 Joule$$

Επομένως η μεταβολή στην δυναμική ενέργεια του σώματος θα είναι

$$\Delta E_\Delta = E_{\Delta(\Delta)} - E_{\Delta(A)} = 100 - 40 = 60 Joule$$

Παρατηρείστε ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος είναι θετική αφού η τελική θέση είναι χαμηλότερα από την αρχική.